

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2025

**Eletrodinâmica Clássica**

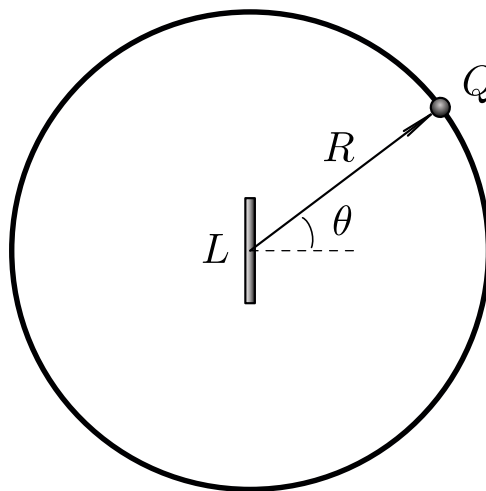
04/08/2025 - 9h00 às 12h00

→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

## QUESTÃO 1 – ELETROSTÁTICA

Considere um dielétrico com o formato de um cilindro fino, de comprimento  $L$  e raio desprezível. O dielétrico tem carga elétrica distribuída uniformemente, com densidade linear  $\lambda$ . Uma carga elétrica pontual  $Q$  se encontra a uma distância  $R$  do centro do dielétrico. A carga  $Q$  está restrita a se mover em um círculo de raio  $R$  cujo centro é o ponto médio do dielétrico. O círculo está no mesmo plano do dielétrico. Ver figura abaixo. Considere  $R \gg L$ .



- (a) (40%) Calcule a componente da força elétrica sobre  $Q$  na direção tangencial  $\hat{\theta}$ , até segunda ordem em  $L/R$ .
- (b) (40%) Quais valores de  $\theta$  correspondem a pontos de equilíbrio estável?
- (c) (20%) Se a carga  $Q$  tem massa  $M$ , ache a frequência de pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio estável.

FORMULÁRIO:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

## QUESTÃO 2 – POTENCIAL ELÉTRICO

Considere uma superfície esférica oca de raio  $R$ . Fixe um sistema de coordenadas esféricas com origem no centro da esfera. Suponha que o potencial eletrostático na superfície da esfera seja dado pela função

$$\Phi(r, \theta, \phi) \Big|_{r=R} = V_0 \cos \theta,$$

onde  $V_0$  é uma constante.

(a) (40%) Encontre o potencial eletrostático  $\Phi(r, \theta, \phi)$  dentro e fora da esfera.

(b) (20%) Mostre que a densidade superficial de carga elétrica sobre a esfera é

$$\sigma(\theta) = \frac{3\epsilon_0 V_0}{R} \cos \theta.$$

(c) (30%) Encontre a energia eletrostática total do campo.

(d) (10%) Mostre que a distribuição de carga do item (b) possui momento de monopolo nulo, e calcule seu momento de dipolo elétrico.

FORMULÁRIO:

Solução da equação de Laplace,  $\nabla^2 f = 0$ , com simetria axial:

$$f(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} \right) P_{\ell}(\cos \theta),$$

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \dots, \quad \int_{-1}^1 dx P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'}$$

$$\nabla g(r, \theta, \phi) = \frac{\partial g}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

### QUESTÃO 3 – MAGNETOSTÁTICA

- (a) (40%) Seja  $V$  um volume esférico de raio  $R$  com centro na origem do sistema de coordenadas. É sabido que o campo elétrico gerado por uma densidade de carga  $\rho(\mathbf{y})$  contida em  $V$  é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3y \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \rho(\mathbf{y}).$$

Use a Lei de Gauss para mostrar que

$$\int_V d^3y \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \mathbf{x} & \text{se } |\mathbf{x}| < R, \\ \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} & \text{se } |\mathbf{x}| > R. \end{cases} \quad (1)$$

- (b) (20%) Considere uma densidade volumétrica de corrente estacionária,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , no vácuo, produzindo um campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Use a Lei de Biot-Savart para mostrar que a integral do campo magnético contido no volume esférico  $V$  pode ser escrita como

$$\int_V d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right) \times \left( \int_V d^3r \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right). \quad (2)$$

- (c) (40%) Um modelo clássico para o elétron é um volume esférico,  $V$ , de raio  $R$  e carga total  $-e$ , que ao girar produz uma densidade de corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) & \text{se } |\mathbf{r}| < R, \\ \mathbf{0} & \text{se } |\mathbf{r}| > R. \end{cases}$$

Seja  $\mathbf{B}_e(\mathbf{r})$  o campo magnético produzido por  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ . A partir das expressões (1) e (2), mostre que

$$\int_V d^3x \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m}_e,$$

onde  $\mathbf{m}_e$  é o momento de dipolo magnético criado por  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ .

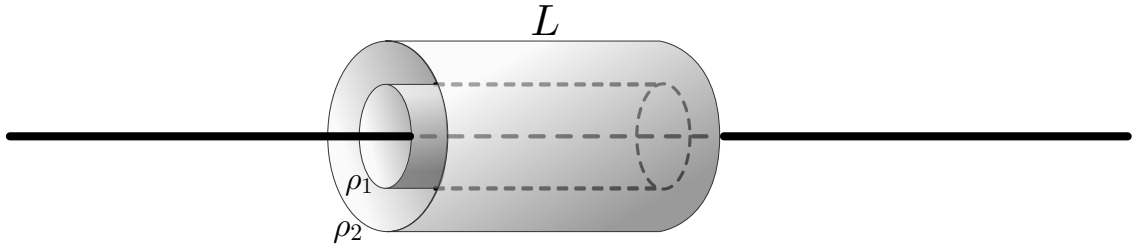
## QUESTÃO 4 – VETOR DE POYNTING; ENERGIA ELETROMAGNÉTICA

Uma corrente de magnitude  $I$  em um fio fino infinito é ligada no instante  $t = 0$ . Os campos elétrico e magnético resultantes são funções do tempo  $t$  e da distância  $\rho$  ao fio, como se segue:

$$\mathbf{E}(t, \rho) = -\frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{z}}}{2\pi t \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{ct}\right)^2}}, \quad \mathbf{B}(t, \rho) = \frac{\mu_0 I \hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\pi \rho \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{ct}\right)^2}},$$

para  $t > \rho/c$  e  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  para  $t < \rho/c$ .

- (a) (40%) Calcule a energia eletromagnética,  $U_T$ , dentro do volume limitado por duas cascas cilíndricas coaxiais, de raios  $\rho_1 < \rho_2$  e comprimento  $L$ , paralelas ao fio, como ilustrado na figura abaixo. Mostre que essa energia é maior que no caso magnetostático (onde  $\mathbf{B} = \mu_0 I / (2\pi \rho) \hat{\boldsymbol{\phi}}$ ) e converge para este quando  $t \rightarrow \infty$ .



- (b) (40%) Calcule o vetor de Poynting e o fluxo de momento eletromagnético,  $P(\rho)$ , na superfície de um cilindro de raio  $\rho$  e comprimento  $L$  paralelo ao fio. Verifique que o fluxo se anula para  $t \rightarrow \infty$ .
- (c) (20%) Verifique que o teorema de Poynting é satisfeito, mostrando que

$$P(\rho_2) - P(\rho_1) = -\frac{\partial U_T}{\partial t}.$$

FORMULÁRIO:

$$\int \frac{dx}{x} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \ln \left( \frac{x}{1-x^2} \right)$$